MAA4 – Koe 25.5.2012 Jussi Tyni
Kaikkiin tehtäviin ratkaisujen välivaiheet näkyviin! Ota kokeesta poistuessasi tämä paperi mukaasi!
Tee konseptiin pisteytysruudukko! Muista kirjata nimesi ja ryhmäsi. **Valitse 6 tehtävää!**

1 Ratkaise.

a) $\left|3-\frac{x}{5}\right|=5-x$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ -2x+3y=6 \end{cases}$

c) Määritä paraabelin yhtälö, kun tiedetään, että sen huippu on y-akselilla korkeudella 6 ja sen nollakohdat ovat x-akselin kohdissa x=-2 ja x=2. 6p

2

a) Suora kulkee pisteen (6, 8) kautta ja on yhdensuuntainen suoran 3x − 5y = 11 kanssa. Muodosta suoran yhtälö.
b) Määritä suoran 3x − 5y = 11 etäisyys pisteestä (6,8) 6p

3 **a**) Selvitä, onko piste (4,9) ympyrällä $x^2+y^2-4y-60=0$, vai sen ulkopuolella tai sisäpuolella.

b) Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (5,5) kautta ja on kohtisuorassa suoraa $x-3y+5=0$ vastaan? 6p

4 Kolmion kärkipisteet ovat kohdissa A(-5, $\frac{10}{3}$), B(2,-1) ja C($\frac{11}{3}$,8).
a) Määritä kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.
b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella. 6p

5 Määritä ympyrälle $x^2+y^2=5$ pisteestä (10,10) piirrettyjen tangenttien yhtälöt 6p

6 a) Määritä ympyröiden $x^2+y^2-6x+2y-3=0$ ja $x^2+y^2+2x-6y-27=0$ leikkauspisteet.

b) Mikä on pisteen (4, 3) lyhin etäisyys ympyrästä $x^2+y^2-4x+6y+3=0$? 6p

7 Määritä paraabelin yhtälö, kun paraabeli kulkee pisteiden $(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),(-2,8)\ ja\ (\frac{-2}{3},\frac{80}{9})$ kautta.
6p

8 a) Määritä vakion *a* arvo niin, että ympyrä $x^2+y^2-6x-2y=a$ sivuaa
- *x*-akselia
- *y*-akselia.

b) Osoita, että origosta ympyrälle $x^2+y^2-6\sqrt{2}\,y+9=0$ piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
6p

Ota tämä lappu mukaan kokeesta poistuessasi, ja kirjaa vaikka vastauksesi tähän ylös. Oikeat ratkaisut voit tarkistaa tänään n. klo 12:00 osoitteesta: http://jussityni.wordpress.com/

Ratkaisut:

1. a) $\left|3-\frac{x}{5}\right|=5-x$. On määritelty, kun $5-x\geq 0 \Leftrightarrow 5\geq x$

$\Leftrightarrow 3-\frac{x}{5}=5-x$ tai $3-\frac{x}{5}=-(5-x)$ $\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ tai $x=\frac{20}{3}$. Jälkimmäinen ei sovi määrittelyjoukkoon, joten x=5/2!

b) $\begin{cases} 5x+2y=3 \,\|\cdot 2 \\ -2x+3y=6 \,\|\cdot 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+4y=6 \\ -10x+15y=30 \end{cases}$ lasketaan alekkain yhteen. =>

$19y=36, y=\frac{36}{19}$. Sijoitetaan jompaankumpaan yht. => $x=-\frac{6}{38}$

c) koska huippu on y-akselilla, paraabelin yhtälö on muotoa $y=ax^2+c$ ja vakiotermi c on käytännössä huipun korkeus, eli c=5. Nyt tiedetään, että paraabeli kulkee esim. pisteen (x,y)=(2,0) kautta. Joten:

$$0=a2^2+6 \Leftrightarrow 0=4a^2+6 \Leftrightarrow -4a^2=6 \Leftrightarrow a^2=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x^2+6$$

2. a) Muutetaan suoran yhtälö normaaliin muotoon, jotta nähdään kulmakerroin:

$3x-5y=11 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{11}{5} \Rightarrow k=\frac{3}{5}$ (yhdensuuntaisilla suorilla on samat kulmakertoimet!)

Pisteen (6,8) kautta kulkevan suoran yhtälö on:

$$y-8=\frac{3}{5}(x-6) \Leftrightarrow y-8=\frac{3}{5}x-\frac{18}{5}$$

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{22}{5}$$

*b)*Suoran yhtälö muotoon $3x-5y-11=0$. Etäisyys d on $d=\frac{|3\cdot 6-5\cdot 8-11|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{33}{\sqrt{34}}$

3. a) Ratkaisu:

$x^2+y^2-4y-60=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=64 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2=8^2$. Ympyrän keskipiste on (0, 2) ja säde 8. Pisteen (4, 9) etäisyys keskipisteestä on $\sqrt{(4-0)^2+(9-2)^2}=\sqrt{65}>\sqrt{64}=8$. Tästä käy ilmi, että piste sijaitsee ympyrän ulkopuolella.

Vastaus: ympyrän ulkopuolella

b) Ratkaisu: Suora $x-3y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow k=\frac{1}{3}$. Nyt $\frac{1}{3}k_2=-1, k_2=-3$ on alkuperäistä suoraa vasten kohtisuorassa olevan suoran normaalin kulmak. Nyt

$y-5=-3(x-5) \Leftrightarrow y=-3x+20$ on normaalin yhtälö.

4. a) Määritetään janojen AB, AC ja BC suuntaisten suorien kulmakertoimet:

AB: $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\frac{10}{3}-(-1)}{-5-2}=\dfrac{\frac{13}{3}}{-7}=-\dfrac{13}{21}$

AC: $k_{AC}=\dfrac{\frac{10}{3}-8}{-5-\frac{11}{3}}=\dfrac{-\frac{14}{3}}{-\frac{26}{3}}=\dfrac{7}{13}$

BC: $k_{BC}=\dfrac{8-(-1)}{\frac{11}{3}-2}=\dfrac{9}{\frac{5}{3}}=\dfrac{27}{5}$

Suorien välinen kulma: $\tan\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$

AB ja AC välinen kulma alfa: $\tan\alpha=\left|\dfrac{-\frac{13}{21}-\frac{7}{13}}{1+(-\frac{13}{21})\cdot\frac{7}{13}}\right|\|\tan^{-1}\Rightarrow\alpha=60{,}1$. Vastaavasti

AB ja BC välinen kulma beta: $\tan\beta=\left|\dfrac{-\frac{13}{21}-\frac{27}{5}}{1+(-\frac{13}{21})\cdot\frac{27}{5}}\right|\|\tan^{-1}\Rightarrow\beta=68{,}7$. Tällöin viimeinen

kulma gamma = 180-60,1-68,7=51,2.

b) Lasketaan sivujen AB ja AC pituus kahden pisteen välisen etäisyyden kaavalla:

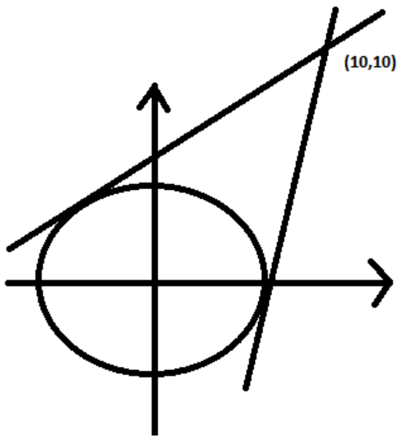
$$AB=\sqrt{(-5-2)^2+(\frac{10}{3}-(-1))^2}=\sqrt{7^2+(\frac{13}{3})^2}=\sqrt{49+\frac{169}{9}}=\sqrt{\frac{610}{9}}$$

$$AC=\sqrt{(-5-\frac{11}{3})^2+(\frac{10}{3}-8)^2}=\sqrt{(-\frac{26}{3})^2+(-\frac{14}{3})^2}=\sqrt{\frac{676}{9}+\frac{196}{9}}=\sqrt{\frac{872}{9}}$$

Nyt tiedetään kolmiosta kahden sivun pituus ja niiden väliin jäävän kulman suuruus, joten

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{610}{9}}\sqrt{\frac{872}{9}}\sin 60{,}1=35{,}1\,yksikköä$$

5. Mallikuva:



Ajatellaan vaikkapa oikeanpuolista tangenttia suorana, joka kulkee pisteen (10,10) kautta ja jolla on jokin kulmakerroin k. Muodostetaan väkisin suoran yhtälö:

$(y-10)=k(x-10)$

$y-10=kx-10k$ Tämän suoran ja ympyrän leikkauspiste saadaan yhtälöparista:

$y=kx-10k+10$

$$\begin{cases} y=kx-10k+10 \\ y^2+x^2=5 \end{cases} \Rightarrow sijoitetaan\ y!$$

$\Rightarrow (kx-10k+10)^2+x^2=5$

$k^2x^2-10k^2x+10kx-10k^2x+100k^2-100k+10kx-100k+100+x^2-5=0$

$(k^2+1)x^2+(-20k^2+20k)x+(100k^2-200k+95)=0$

Muodostuu toisen asteen yhtälö, jolla pitäisi olla vain yksi ratkaisu k:lle, koska yhdellä suoralla ei voi olla kahta eri kulmakerrointa! Toisen asteen yhtälöllä on yksi ratkaisu jos ja vain jos ratkaisukaavassa neliöjuuren sisusta, eli determinantti=0:

$(-20k^2+20k)^2-4(k^2+1)(100k^2-200k+95)=0$

$400k^4-800k^3+400k^2-400k^2+800k-380-400k^4+800k^3-380k^2=0$

$-380k^2+800k-380=0$

Ratkaistaan tästä k, niin saamme molempien tangenttien kulmakertoimet:

$-380k^2+800k-380=0 \,\|: 20$

$-19k^2+40k-19=0$

$$k=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot(-19)\cdot(-19)}}{38}=\frac{40\pm\sqrt{156}}{38}=\frac{40\pm 2\sqrt{39}}{38}$$

$$=\frac{40}{38}\pm\frac{\sqrt{39}}{19}=\frac{20}{19}\pm\frac{\sqrt{39}}{19}$$

Koska sievennyksestä ei tule mitään nättiä, otetaan tästä likiarvot, eli kulmakertoimet ovat: k=1,4 ja k=0,7

Tangenttien yhtälöt: $\begin{array}{l} y-10=1,4(x-10) \\ y=1,4x-4 \end{array}$ ja $\begin{array}{l} y-10=0,7(x-10) \\ y=0,7x+3 \end{array}$

6. a) Määritä ympyröiden $x^2+y^2-6x+2y-3=0$ ja $x^2+y^2+2x-6y-27=0$ leikkauspisteet.

Ratkaisu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y - 27 = 0 \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt puolittain

$8x - 8y - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8y = 8x - 24 \; || : 8 \Leftrightarrow \quad y = x - 3$

Sijoitetaan toiseen ympyrän yhtälöön $y = x - 3$ ja ratkaistaan leikkauspisteiden x-koordinaatit

$x^2 + (x-3)^2 - 6x + 2(x-3) - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x^2 - 6x + 9 - 6x + 2x - 6 - 3 = 0$

$2x^2 - 10x = 0 \; || : 2$

$x^2 - 5x = 0$, josta $x = 0$ tai $x = 5$

$y = x - 3$, josta , josta $y = -3$ tai $y = 2$

Vastaus: (0, – 3) ja (5, 2)

b) Mikä on pisteen (4, 3) lyhin etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$?

Ratkaisu

Merkitään ympyrän säde r ja pisteen (4, 3) etäisyys ympyrän keskipisteestä d

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$ Keskipiste on $(2, -3)$ ja $r = \sqrt{10}$

Jos piste on ympyrän ulkopuolella, on sen lyhin etäisyys ympyrästä $d - r$

$d - r = \sqrt{(4-2)^2+(3+3)^2} - \sqrt{10} = \sqrt{40} - \sqrt{10} = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

Vastaus: $\sqrt{10}$

7. Muodostuu yhtälöryhmä $\begin{cases} a+2b+4c=6 \\ 4a-2b+c=8 \\ 4a-6b+9c=80 \end{cases}$ Ratkaistaan a,b ja c$\Rightarrow$

a=2, b=-6 ja c=4, joten $y = 2x^2 - 6x + 4$

8.

a) *Ratkaisu*

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$x^2 + y^2 - 6x - 2y = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = a + 9 + 1$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = a + 10 = r^2$

a) Ympyrä sivuaa x-akselia, kun säde on sama kuin keskipisteen y-koordinaatin itseisarvo

$\sqrt{a+10} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a + 10 = 1$, josta $a = -9$

b) Ympyrä sivuaa y-akselia, kun säde on sama kuin keskipisteen x-koordinaatin itseisarvo

$\sqrt{a+10} = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad a + 10 = 9$, josta $a = -1$

Vastaus: a) $a = -9$ b) $a = -1$

b) *Ratkaisu*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}\; y + 9 = 0 \\ y = k\,x \end{cases}$$

Sijoitetaan *y*:n lauseke suoran yhtälöstä ympyrän yhtälöön

$x^2 + k^2 x^2 - 6\,k\sqrt{2}\,x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + k^2)\,x^2 - 6\,k\sqrt{2}\,x + 9 = 0$

Ratkaistaan tangenttien kulmakertoimet diskriminantin nollakohtayhtälöstä.

$D = 72\,k^2 - 36 - 36\,k^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 36\,k^2 = 36$, josta $k = \pm 1$

Kulmakertoimien tulo on $1 \cdot (-1) = -1$

Vastaus: Tangentit ovat kohtisuorassa, koska niiden kulmakertoimien tulo on – 1